Odborné vyjádření

k rozporu mezi zadáním úlohy 11 maturitního testu z matematiky v jarním zkušebním období 2019 a jejím řešením uvedeným v tzv. Klíči správných řešení

Cílem tohoto odborného vyjádření je

1. ukázat, že kvůli dosažení souladu s Klíčem správných řešení (a také se vzorovým řešením) by bylo třeba zadání úlohy 11 pozměnit – potom by ovšem **šlo o jinou úlohu, než byla v testu**;
2. dokázat, že jediným správným řešením úlohy 11 (tak, jak byla skutečně zadána) je dvojice hodnot 112° a 248°;
3. vysvětlit, že pokud byla uznávána odpověď (pouze) 248°, měla být uznávána rovněž odpověď (pouze) 112°.

Zadání úlohy 11 znělo:

> **1 bod**
>
> **11** Pro dva různé úhly $\alpha = 112°, \beta \in \langle 0°; 360° \rangle$ platí $\cos\alpha = \cos\beta$.
>
> **Určete ve stupních velikost úhlu β.**

V Klíči správných řešení je pro úlohu 11 uvedena jediná správná odpověď $\beta = 248°$:

11	$\beta = 248°$	**1 b.**

Odpovídá tomu rovněž oficiální vzorové řešení úlohy 11 (modrou barvou):

> **1 bod**
>
> **11** Pro dva různé úhly $\alpha = 112°, \beta \in \langle 0°; 360° \rangle$ platí $\cos\alpha = \cos\beta$.
>
> **Určete ve stupních velikost úhlu β.**
>
> Řešení:
> Pro každé $x \in \langle 0°; 360° \rangle$ platí: $\cos x = \cos(360° - x)$.
> $\beta = 360° - \alpha$
> $\beta = 360° - 112° = \mathbf{248°}$

ad 1. Hodnota 248° je správným řešením jiné úlohy, než je úloha 11

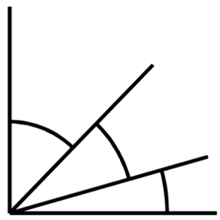
Na straně 7 testu je nahoře uvedena úloha 10 (viz níže), úloha 11 je na téže straně hned pod ní. Zadání úlohy 10 důsledně rozlišuje **úhel** (jako geometrický útvar tvořený částí roviny mezi dvěma polopřímkami, které vycházejí z téhož bodu – vrcholu tohoto úhlu) a **velikost úhlu** (jako číslo ve stupních, které vyjadřuje, jak moc jsou ony polopřímky „rozevřeny“).

Například **pravý úhel** na obrázku je tvořen částí roviny mezi svislou a vodorovnou polopřímkou, **velikost tohoto pravého úhlu** (a také každého jiného pravého úhlu) je 90°. Při dodržení téhož úzu se dále uvádí, že pravý úhel na obrázku je rozdělen na tři **úhly.** Podle zadání tvoří **velikosti těchto úhlů** tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti a nejmenší z těchto tří úhlů má **velikost** 11°.

Vzhledem k tomu, jak důsledně odlišovalo zadání úlohy 10 geometrické pojetí úhlu od jeho velikosti ve stupních, nemůže Centrum věrohodně tvrdit, že v úloze 11 získal pojem **úhel** zničehonic význam **velikost úhlu**. Rozhodně také nelze spravedlivě požadovat, aby žáci uhodli, že právě tento význam měl autor úlohy na mysli – byť se vyskytuje v matematicky nedbalém vyjadřování některých učebnic, učitelů i žáků. Jak dále ukážu, je proto **matematicky**, a zejména pak v kontextu zacházení s oběma pojmy v úloze 10, hodnota $\beta = 248°$ pouze částečným správným řešením úlohy 11. Je ovšem **testologicky** správné, že Centrum uznávalo hodnotu $248°$ ve smyslu postupu představovaném vzorovým řešením (modrou barvou). V situaci, kterou samo vytvořilo a která nejspíš byla z hlediska žáka nejednoznačná, totiž Centrum jednalo ve prospěch maturantů.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

Pravý úhel je rozdělen na tři úhly, jejichž velikosti tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Nejmenší z těchto tří úhlů má velikost 11°.



(CZVV)

1 bod

10 Určete ve stupních velikost největšího z těchto tří úhlů.

Při sestavování Klíče správných řešení a vzorového řešení si Centrum patrně neuvědomilo, že formulace „Pro dva různé úhly…“ vyjadřuje – ve shodě s významem termínu **úhel** v úloze 10 **stejného testu** – vztah mezi geometrickými útvary, třeba jejich vzájemnou polohu, zatímco vztah mezi velikostmi těchto útvarů, o který Centru zřejmě šlo, vyjadřuje například slovní spojení „Pro dva různě velké úhly…“. Kdyby zadání obsahovalo spojení „Pro dva různě velké úhly…“, byla by opravdu vyloučena možnost $\alpha = \beta$ (což předpokládá vzorové řešení) a hodnota 248° by byla úplným správným řešením. Ovšem **řešením úlohy s jiným zadáním, než bylo v testu**. Úlohy někdy mívají komplexnější charakter a k jejich vyřešení bývá zapotřebí uplatnit znalosti z několika tematických okruhů učiva.[1]

Je rovněž velmi důležité uvědomit si, že **maturitní testování probíhá jinak než běžná školní písemná práce nebo ústní zkoušení**: při testování chybí průběžná či následná komunikace mezi maturantem a hodnotitelem (resp. autorem úlohy) a ani jeden nemá možnost doptat se, jak ten druhý myslel to, co napsal. Zatímco autor úlohy by měl formulovat zadání jednoznačně a srozumitelně, maturant nemá leckdy ani povinnost podrobněji zapsat, vysvětlit, či dokonce odůvodnit svůj postup: zadání úlohy 11 vyžadovalo pouze to, aby do svého záznamového archu čitelně zapsal ve stupních velikost úhlu β. Jinou povinnost maturant v úloze 11 neměl.

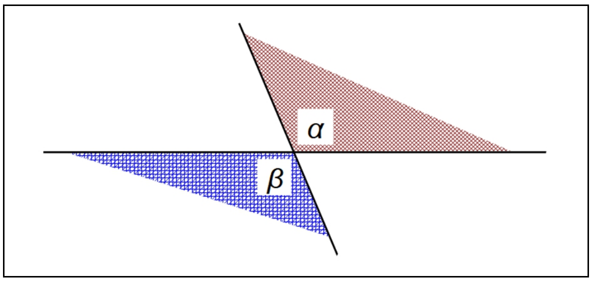
1 Například úloha 10 měla zřejmě zjistit, nakolik maturant zvládl podstatu učiva tematického okruhu 5.2 (Aritmetická posloupnost) z platného maturitního katalogu požadavků. Nutným předpokladem úspěšného vyřešení úlohy ovšem bylo, aby maturant znal velikost pravého úhlu ve stupních – a tato znalost nepatří do učiva o posloupnostech, nýbrž do geometrie (planimetrie).

K nesprávné interpretaci zadání úlohy 11 Centrem mohl přispět záměr ověřit jejím prostřednictvím znalost goniometrických funkcí ve smyslu tematického okruhu 4.5. Jenže maturantům nebyl tento záměr znám. Někteří asi rozpoznali v zadání „signály“, jež – už bez dalších úvah – spustily v jejich hlavách nesprávný postup odpovídající vzorovému řešení. Jiní, pokud uplatnili poznatky z tematického okruhu 6.1 (Planimetrické pojmy a poznatky), mohli postupovat jinak a dospět k jiným výsledkům (viz níže).

Proto je při matematicky správné interpretaci zadání úlohy 11 nutné **vycházet pouze z toho, co v něm bylo skutečně uvedeno** – nikoli z toho, co Centrum zamýšlelo, ale v zadání to neuvedlo. Svévolně dodávat k zadání další podmínky, které z něj nevyplývají (například vyloučit možnost $\alpha = \beta$), je postupem odporujícím samotné podstatě matematiky. Natož chtít od žáka, aby je k nedostatečnému zadání dodal sám. Současně je nutné **předpokládat, že žák dospěl ke své odpovědi na základě správné úvahy**. Odpověď žáka v úloze 11 měla obsahovat pouze velikost úhlu ve stupních. Při vyhodnocování odpovědí, které kvůli formátu testové úlohy musejí obsahovat tak málo informací jako v tomto případě, patří tento předpoklad k profesní etice (zásada „především neškodit“). Zvláště pak tehdy, jde-li o test se závažnými důsledky pro žáky, jímž maturitní test nepochybně je.

ad 2. Skutečným správným řešením úlohy 11 je dvojice hodnot 112° a 248°

Hodnota β = 248° nepochybně vyhovuje zadání úlohy. Žáci, kteří se jím řídili, ovšem mohli matematicky správnou úvahou dospět také k hodnotě β = 112°. Jak, to lze snadno vysvětlit. Úhly α = 112°, β = 112° na obrázku níže jsou totiž nepochybně různé, jak zadání požaduje, neboť leží každý jinde, mezi různými polopřímkami. Velikost úhlu β není menší než 0° ani větší než 360° a samozřejmě platí rovněž vztah cos α = cos β. Hodnota β = 112° tedy vyhovuje všem podmínkám zadání úlohy 11. Je také zjevné, že úhlů β o velikosti 112°, které jsou různé od úhlu α o velikosti 112°, existuje nekonečně mnoho – příklad dvojice vrcholových úhlů na obrázku je jen jednou z řady dalších možností, které se ve škole probírají, a jsou dokonce předmětem úloh v testech Centra.



Z odpovědi ministerstva školství čj. MSMT-20006/2019-1 (v příloze) na mou žádost o poskytnutí informace podanou podle zákona č. 106/1999 Sb., o svobodném přístupu k informacím, navíc vyplynulo, že Centrum uznávalo jako správnou rovněž odpověď „248° ve spojení s 112° – aniž by to uvedlo v Klíči správných řešení. To ovšem znamená, že **Centrum si je vědomo přinejmenším toho, že bylo nutné připustit interpretaci spojení „dva různé úhly“ ve smyslu úhlů jako geometrických útvarů (tj. dvou různých množin bodů) – nikoli dvou různě velkých čísel (hodnot).**

ad 3. Odpověď (pouze) 112° má být rovněž uznávána

Klíč správných řešení i výše zmíněná odpověď MŠMT potvrzují, že Centrum uznávalo jako správnou také odpověď (pouze) 248°. Z části **1.** vyplývá, že odpověď (pouze) 248° není – **matematicky**, ve smyslu užití pojmů úhel a velikost úhlu v úloze 10 – úplným správným řešením úlohy 11. Je jen úplným správným řešením jiné úlohy, než byla v testu. Jak jsem uvedl již v části **1.**, je **testologicky** správné, že ji Centrum uznávalo – ovšem matematicky, v kontextu testu, pro to nebyl důvod. **Pro uznávání odpovědi (pouze) 248° tudíž zbývá jediný matematicky přijatelný důvod: byla uznávána jako částečné správné řešení úlohy 11**. Také s tím lze souhlasit vzhledem k nekvalitnímu zadání úlohy 11 a k zásadě „především neškodit“.

Jenomže obě hodnoty, tj. 248° a 112°, jsou jako částečná řešení úlohy 11 matematicky i testologicky rovnocenné – podobně, jako jsou hodnoty 2 a 3 matematicky i testologicky rovnocennými částečnými řešeními kvadratické rovnice (x – 2)(x – 3)=0. Jak k hodnotě 112°, tak k hodnotě 248° mohl maturant dospět buď správnou úvahou opomíjející druhé řešení, nebo postupem nesprávným: hodnotu 112° mohl opsat ze zadání, hodnota 248° je rozdílem čísel 360° a 112° vyskytujícím se v zadání. Žáci, kteří se ocitnou v nouzi, se k podobným postupům uchylují běžně. Protože však v případě úlohy 11 neměli povinnost svůj postup zaznamenat nebo odůvodnit, je třeba na hodnotu zapsanou v záznamovém archu pohlížet tak, že k ní žáci dospěli na základě správné úvahy opomíjející druhé řešení. Vzhledem k nízké kvalitě zadání úlohy 11 mělo být přijato rozhodnutí, že budou uznávána i částečná řešení. **Centrum ovšem zcela jistě nesmělo postupovat tak, že uznávalo pouze jedno z nich.** Potom totiž fakticky uznávalo odpověď (248°), která z matematického hlediska není úplným správným řešením úlohy 11, ale jen jejím částečným správným řešením. Druhou odpověď (112°), která je z matematického hlediska rovněž částečným správným řešením úlohy 11, ovšem neuznávalo. To odporuje zásadě „především neškodit“ a není ani spravedlivé.

Je jistě chvályhodné, že se Centrum pokusilo napravit situaci, kterou samo způsobilo, rozšířením okruhu uznávaných odpovědí. **Rozšíření, jež proběhlo z neznámých důvodů de facto i de iure v utajení,** tedy bez vědomí schvalovacích komisí, však bohužel nezohlednilo všechny komplikace, které nekvalitní zadání žákům způsobilo, případně způsobit mohlo. Je proto nedostatečné.

Závěr: Jediným úplným správným řešením úlohy 11, jak byla v testu zadána, je dvojice hodnot 112° a 248°. Centrum uznávalo za částečně správnou odpověď pouze hodnotu 248°, mělo ovšem uznávat za částečně správnou odpověď také hodnotu 112°. Její neuznávání bylo profesně neetické a nespravedlivě poškodilo maturanty, kteří tuto odpověď uvedli.

Přílohy:

a) maturitní test Matematika z jara 2019
b) Klíč správných odpovědí k maturitnímu testu Matematika z jara 2019
c) Vzorová řešení úloh maturitního test Matematika z jara 2019
d) odpověď MŠMT čj. MSMT-20006/2019-1 na žádost o poskytnutí informace

V Praze, 4. 7. 2019 RNDr. Oldřich Botlík, CSc.

Informace o autorovi odborného vyjádření

Oldřich Botlík je absolventem Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, kde v roce 1974 ukončil studium oboru topologie. Na téže fakultě absolvoval rovněž doktorské studium (tehdy nazývané vědeckou aspiranturou) v oboru algebra a teorie čísel.

Jako spoluautor testovacího projektu Kalibro se 25 let podílel na tvorbě a redigování testů z matematiky pro žáky základních a středních škol, komentoval jejich výsledky pro učitele a ředitele a připravoval rovněž odůvodnění správných odpovědí. V českých podmínkách patří jeho zkušenosti s testováním matematických znalostí a dovedností žáků k nejintenzivnějším délkou trvání i rozsahem.

Kontakty: Čínská 717/13, 160 00 Praha 6-Bubeneč, tel. 724 058 384, e-mail old.botlik@volny.cz